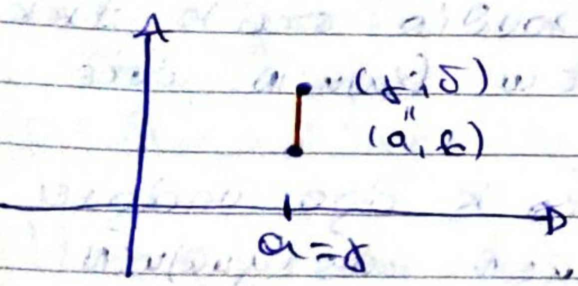
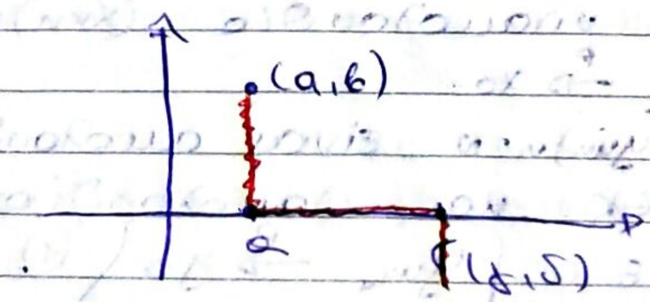
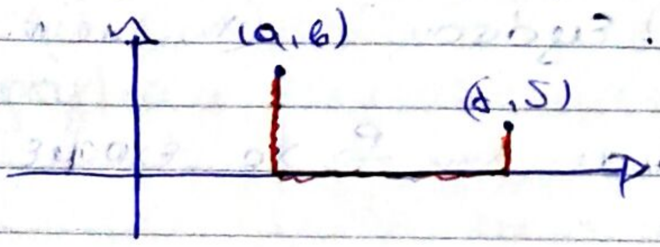
16|5|19

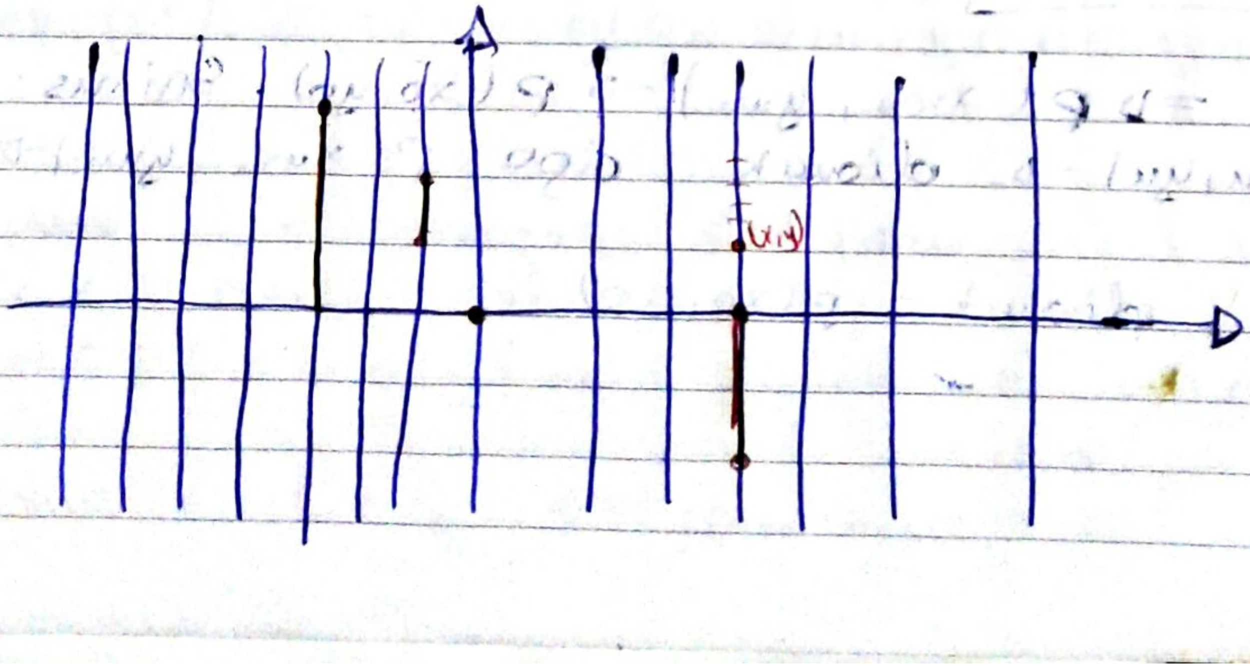
Φυλλάδιο 3

8) $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $d((a,b),(\gamma,\delta)) = \begin{cases} |\delta - b| & \text{αν } a=\gamma \\ |b| + |\gamma - a| + |\delta| & \text{αν } a \neq \gamma \end{cases}$









γ) Αν $x,y\in\mathbb{R}$ ν.δ.ο η ακολουθία $\left(\left(x, y+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι πάντα συγκλίνουσα ακολουθία στον $(\mathbb{R}^2, d)$

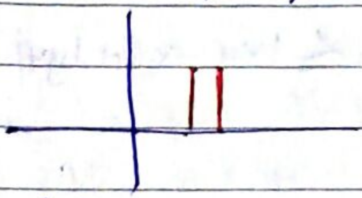
Αποδ.

Θα δ.ο η παραπάνω ακολουθία συγκλίνει ως προς τη μετρική d στο (x,y)

$d\left(\left(x, y+\frac{1}{n}\right), (x,y)\right) = \left|\left(y+\frac{1}{n}\right) - y\right| = \frac{1}{n} \to 0$

Συνεπώς $\left(x, y+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{d} (x,y)$

δ) Αν $(x,y)\in\mathbb{R}$ να εξετάσετε πότε η ακολουθία $\left(x+\frac{1}{n}, y\right)$ είναι συγκλίνουσα στον $(\mathbb{R}^2, d)$



1η περίπτωση $\boxed{y=0}$: Θα δ.ο. η ακολουθία $\left(\left(x+\frac{1}{n}, 0\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ως προς τη μετρική d στο $(x,0)$

$d\left(\left(x+\frac{1}{n}, 0\right), (x,0)\right) = |0| + \left|\left(x+\frac{1}{n}\right) - x\right| + |0| = \frac{1}{n} \to 0$

Άρα $\left(x+\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{d} (x,0)$

2η περίπτωση $\boxed{y\neq 0}$: Θα δ.ο. η ακολουθία $\left(\left(x+\frac{1}{n}, y\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι συγκλίνουσα. Αρκεί ν.δ.ο δεν είναι βασική

Για $n\neq m$ $d\left(\left(x+\frac{1}{n}, y\right), \left(x+\frac{1}{m}, y\right)\right) =$

$= |y| + \left|\left(x+\frac{1}{n}\right) - \left(x+\frac{1}{m}\right)\right| + |y| \geq 2|y|$ άρα η ακολ.

$\left(x+\frac{1}{n}, y\right)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι βασική στον $(\mathbb{R}^2, d)$ άρα δεν είναι συγκλίνουσα ε) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g : (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, d)$ με $g(x,y) = (y,x)$ δεν είναι συνεχής

Αποδ.

Από τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε ότι:

$$\left(1, 1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{d} (1,1) \quad \text{ενώ:} \quad \left(1+\frac{1}{n}, 1\right) \overset{d}{\not\to} (1,1)$$

δηλ. $g\left(\left(1, 1+\frac{1}{n}\right)\right) \overset{d}{\not\to} g(1,1)$. Άρα (από την αρχή της μεταφοράς) η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής (στο $(1,1)$)

στ) Αν $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολ. στο $\mathbb{R}^2$ και $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x,0) \iff x_n \to x \quad y_n \to 0$

1η περίπτωση $\boxed{y=0}$

$$d((x_n,y_n),(x,0)) = \begin{cases} |y_n| + |x_n - x| + |0|, & x_n \neq x \\ |y_n - 0|, & x_n = x \end{cases} \leq |x_n - x| + |y_n|$$

($\Leftarrow$) Αν $x_n \to x$ και $y_n \to 0$ τότε από τα παραπάνω $d((x_n,y_n),(x,0)) \to 0$ άρα: $(x_n,y_n) \xrightarrow{d} (x,0)$

($\Rightarrow$) Αν $(x_n,y_n) \xrightarrow{d} (x,0)$ δηλ. $d((x_n,y_n),(x,0)) \to 0$

Εφόσον $0 \leq |y_n| \leq d((x_n,y_n),(x,0))$ άρα:

$|y_n| \to 0$ άρα $y_n \to 0$

Αν $x_n \not\to x$ τότε $\exists\, \varepsilon>0$ και υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $|x_{k_n} - x| \geq \varepsilon \;\; \forall n$ άρα

$d((x_{k_n}, y_{k_n}),(x,0)) \geq |x_{k_n} - x| \geq \varepsilon \quad \forall n$

άτοπο.

Άρα $x_n \to x$

2η περίπτωση $\boxed{y \neq 0}$ Θα δείξουμε ότι:

$(x_n,y_n) \xrightarrow{d} (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{η } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ είναι τελικά σταθερή} \\ \text{ίση με } x \text{ (δηλ. } \exists n_1 \in \mathbb{N} \ x_n = x \\ \forall n \geq n_1) \text{ και } y_n \to y \end{cases}$

($\Leftarrow$) Αν $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n = x$ $\forall n \geq n_1$ και $y_n \to y$

$d((x_n,y_n),(x,y)) = d((x,y_n),(x,y)) = |y_n - y| \to 0$

εφόσον $y_n \to y$

Άρα: $(x_n,y_n) \xrightarrow{d} (x,y)$

($\Rightarrow$) Αν η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι τελικά ίση με x τότε υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $x_{k_n} \neq x$ $\forall n$, $d((x_{k_n},y_{k_n}),(x,y)) = |y_{k_n}| + |x_{k_n} - x| + |y| \geq$

$\geq |y| > 0$ $\forall n$ άρα $(x_{k_n},y_{k_n}) \not\xrightarrow{d} (x,y)$ άτοπο (διότι $(x_n,y_n) \xrightarrow{d} (x,y)$) Άρα $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ $x_n = x$ $\forall n \geq n_1$

Για $n \geq n_1$: $d((x_n,y_n),(x,y)) = d((x,y_n),(x,y)) = |y_n - y|$ και εφόσον $d((x_n,y_n),(x,y)) \to 0$ προκύπτει $y_n \to y$.

γ) Δείξτε ότι οι προβολές $P:(\mathbb{R}^2,d) \to \mathbb{R}$ $P(x,y)=x$
$Q:(\mathbb{R}^2,d) \to \mathbb{R}$ $Q(x,y)=y$ είναι συνεχείς

Αποδ.

Με αρχή μεταφοράς αν $(x_n,y_n) \xrightarrow{d} (x,y)$

Για την P, αν $\boxed{y=0}$ τότε $x_n \to x$ (και $y_n \to 0$) δηλ. $P(x_n,y_n) \to P(x,y)$

αν $\boxed{y \neq 0}$ από το προηγ. ερώτημα η (x_n) είναι τελικά ίση με x άρα $x_n \to x$ δηλ. $P(x_n,y_n) \to P(x,y)$

Επομένως P συνεχής

Για την Q: από το προηγ. ερώτημα $y_n \to y$ δηλ. $Q(x_n,y_n) \to Q(x,y)$. Άρα Q: συνεχής η) Αν ρ είναι η ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^2$ να εξεταστεί αν η ταυτοτική συνάρτηση $I: (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, \rho)$ είναι συνεχής και $J: (\mathbb{R}^2, \rho) \to (\mathbb{R}^2, d)$ είναι συνεχής.

Αποδ.

Αν $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x, y)$ από τα προηγούμενα $x_n \to x$ και $y_n \to y$ άρα $(x_n, y_n) \xrightarrow{\rho} (x, y)$. Άρα η I είναι συνεχής. Η $J: (\mathbb{R}^2, \rho) \to (\mathbb{R}^2, d)$ δεν είναι συνεχής. [Πράγματι $\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{\rho} (1,1)$

αλλά $\left(1+\frac{1}{n}, 1\right) \not\xrightarrow{d} (1,1)$

Συνεκτικοί μετρικοί χώροι (και συνεκτικά σύνολα)

Ορισμός: Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) λέγεται συνεκτικός αν δεν μπορεί να γραφτεί $X = A \cup B$ με τα A, B μη κενά, ξένα και ανοικτά υποσύνολα του X.

Ένα υποσύνολο E ενός μετρικού χώρου (X, ρ) λέγεται συνεκτικό αν ο (E, ρ_E) όπου ρ_E είναι η σχετική μετρική, είναι συνεκτικός μετρικός χώρος [δηλ. δεν μπορεί να γραφτεί $E = A \cup B$ με τα A, B ξένα μη κενά σχετικά ανοικτά στο E]

Παρατήρηση: ο (X, ρ) είναι συνεκτικός αν και μόνο αν δεν υπάρχουν δύο μη κενά ξένα και κλειστά υποσύνολα του X ώστε $X = A \cup B$

Παραδείγματα: α) Αν X σύνολο με δύο τουλάχιστον στοιχεία και ρ η διακριτή μετρική στον X τότε ο (X, ρ) δεν είναι συνεκτικός

β) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$

$A = \{ q \in \mathbb{Q} \quad q > \sqrt{2} \} = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty)$

$B = \{ q \in \mathbb{Q} \quad q < \sqrt{2} \} = \mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})$. Τα A, B είναι μη κενά, ξένα, $A \cup B = \mathbb{Q}$ και τα A, B είναι ανοικτά στο $\mathbb{Q}$. Άρα το $\mathbb{Q}$ δεν είναι συνεκτικό

Πρόταση

Έστω (X,ρ) μ.χ. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο (X,ρ) είναι συνεκτικός,

(ii) Τα μόνα υποσύνολα του X που είναι ανοικτά και κλειστά ταυτόχρονα είναι τα $\emptyset, X$.

(iii) Δεν υπάρχει συνεχής και επί απεικόνιση $f: X \to \{0,1\}$

Απόδειξη

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Έστω $A \subseteq X$ ώστε το A να είναι ταυτόχρονα ανοικτό και κλειστό $X = A \cup (X \setminus A)$ όπου A, $X \setminus A$ ανοικτά ξένα. Εφόσον ο X είναι συνεκτικός $A = \emptyset$ ή $X \setminus A = \emptyset$ δηλ $A = \emptyset$ ή $A = X$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Με απαγωγή σε άτοπο.

Υποθέσαμε ότι υπάρχει $f: X \to \{0,1\}$ συνεχής και επί. Τότε εφόσον το $\{0\}$ είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του $\{0,1\}$ άρα το $A = f^{-1}(\{0\})$ είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του X (διότι f συνεχής) εφόσον η f είναι επί του $\{0,1\}$, $A \neq \emptyset$ και $A \neq X$.

Άτοπο από την υπόθεση μας.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι ο X δεν είναι συνεκτικός, τότε υπάρχουν A, B μη κενά, ξένα ανοικτά υποσύνολα του X ώστε $X = A \cup B$

Ορίζουμε $f: X \to \{0,1\}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in B \end{cases}$

f καλά ορισμένη (διότι $A \cap B$)

f: επί (διότι A, B μη κενά), f συνεχής ($f^{-1}\{0\} = B$ ανοικτό, $f^{-1}\{1\} = A$ ανοικτό) άτοπο

Επομένως ο X είναι συνεκτικός

Ένα υποσύνολο I του $\mathbb{R}$ λέγεται διάστημα αν $\forall\ x, y \in I$ με $x < y$ και κάθε $z \in \mathbb{R}$ με $x < z < y$ ισχύει: $z \in I$

Τα (μη κενά) διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι τα σύνολα της μορφής $\{a\}$ για $a \in \mathbb{R}$. $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) για $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$

$(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$ για $a \in \mathbb{R}$ το $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Θεώρημα

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ τότε το E είναι συνεκτικό $\Leftrightarrow$ είναι διάστημα

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι το E δεν είναι διάστημα (και θα αποδείξουμε ότι δεν είναι συνεκτικό)

Τότε υπάρχουν $x, y \in E$ και $z \in \mathbb{R}$ με $x < z < y$ ώστε $z \notin E$ Θέτουμε $A = E \cap (-\infty, z)$

$B = E \cap (z, +\infty)$

$A \neq \emptyset$ (διότι $x \in A$) και $B \neq \emptyset$ (διότι $y \in B$) $A \cap B = \emptyset$

Τα A, B είναι ανοικτά στο E (ως τομή του E με ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$)

$A \cup B = (E \cap (-\infty, z)) \cup (E \cap (z, +\infty)) = E \cap ((-\infty, z) \cup (z, +\infty)) =$

$= E \cap (\mathbb{R} \setminus \{z\}) = E$

διότι $z \notin E$

Επομένως το E δεν είναι συνεκτικό.